TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
KHOA TOÁN

LƯU THỊ SONG

VỀ CÁC ĐỊNH LÝ MONTEL,KÖBE, ÁNH XẠ RIEMANN TRONG GIẢI TÍCH PHỨC MỘT BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ
NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH

Thái Nguyên, năm 2019

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
KHOA TOÁN

LƯU THỊ SONG

VỀ CÁC ĐỊNH LÝ MONTEL,KÖBE, ÁNH XẠ RIEMANN TRONG GIẢI TÍCH PHỨC MỘT BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ
NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TSKH. TRẦN VĂN TẤN

Thái Nguyên, năm 2019

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TSKH. Trần Văn Tấn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến thầy! Dù bận nhiều công việc nhưng thầy vẫn dành thời gian hướng dẫn và giải đáp mọi vấn đề một cách rõ ràng cho tôi. Xin chân thành cảm ơn thầy vì đã tin tưởng và hết lòng giúp đỡ tôi trong thời gian khó khăn vừa qua.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán thuộc trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô giáo Khoa Toán - trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, nhất là các thầy cô trong tổ giải tích, các thầy cô luôn nhiệt tình giảng dạy và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập, để tôi hoàn thành luận văn của mình.

Do thời gian và khả năng của bản thân còn hạn chế nên luận văn của tôi không tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Mục lục

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Các định lí Montel, Köbe về tính chuẩn tắc, Định lí ánh xạ Riemann là những kết quả đẹp đẽ và quan trọng trong Giải tích phức một biến và liên tục thu hút được sự quan tâm của các nhà toán học. Với mong muốn tìm hiểu chủ đề quan trọng này nên chúng tôi đã chọn đề tài này.

2. Cấu trúc luận văn

Luân văn được chia làm hai chương: Ở Chương 1, luận văn trình bày về Định lí ánh xạ Riemann về sự tồn tại song ánh chỉnh hình giữa một miền đơn liên (khác toàn thể) trong $\mathbb{C}$ với đĩa đơn vị. Để trình bày vấn đề này, chúng tôi tham khảo các tài liệu [1, 2]. Chương 2 đề cập tới một số tiêu chuẩn chuẩn tắc kiểu Montel. Chúng tôi tham khảo [4] để cập nhật một số kết quả gần đây về sự mở rộng Định lí Montel.

Thái Nguyên, ngày 27 tháng 1 năm 2019

Tác giả

LƯU THỊ SONG

Chương 1

Định lí ánh xạ Riemann

1.1 Định lý Arzela - Ascoli

Cho X là một không gian metric và $\mathcal{F}$ là một họ các hàm trên X, liên tục và nhận giá trị phức.
Họ $\mathcal{F}$ được gọi là liên tục đều trên tập con $Y \subset X$ nếu với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $p, q \in Y$ và mọi $f \in \mathcal{F}$ thỏa mãn $d_X(p, q) < \delta$, thì $|f(p) - f(q)| < \epsilon$.
Họ $\mathcal{F}$ được gọi là chuẩn tắc trên tập con $Y \subset X$ nếu với mỗi dãy $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, tồn tại một dãy con $\{f_{n_j}\}$ hội tụ đều trên mỗi tập con compact của Y.

Nhắc lại rằng một không gian mêtric X được gọi là tách được nếu tồn tại tập con đếm được $\{p_j\} \subset X$ là trù mật.

Định lý 1.1. *(Arzela - Ascoli) Cho X là một không gian mêtric tách được. Giả sử có tập con compact $K_n \subset X$ sao cho $K_n \subset K_{n+1}$, và $\bigcup_n K_n = X$. Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm trên X, liên tục, nhận giá trị phức. Khi đó, $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu:*
(i) Họ $\mathcal{F}$ là liên tục đều trên mỗi tập con compact của X.
(ii) Với bất kì $p \in X$, tồn tại hằng số $C_p > 0$ sao cho $|f(p)| \leq C_p$ với mọi $f \in \mathcal{F}$.

Chứng minh. 1. Điều kiện cần:

Để làm rõ điều kiện cần của (i), chúng ta sẽ dùng phản chứng. Giả sử $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc, và $\mathcal{F}$ không liên đều trên tập con compact $K \subset X$. Khi đó, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mỗi n, ta có các điểm $p_n, q_n \in K$ và một hàm $f_n \in \mathcal{F}$ sao cho $d_X(p_n, q_n) < \dfrac{1}{n}$ và $|f_n(p_n) - f_n(q_n)| \geq \epsilon$. Do $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc, tồn tại một dãy con f_{n_j} mà hội tụ đều trên K đến giới hạn f_0, thì phải liên tục. Chúng ta có thể chọn dãy con xa hơn (mà ta lại gọi dãy $\{n_j\}$ với $p_{n_j} \to p_0$ và $q_{n_j} \to q_0$. Nhưng từ $d_X(p_{n_j}, q_{n_j}) < n_j^{-1} \to 0$, kéo theo $p_0 = q_0$. Tuy nhiên, từ f_0 liên tục

$$\epsilon \leq \limsup_{j \to \infty} |f_{n_j}(p_{n_j}) - f_{n_j}(q_{n_j})| = |f_0(p_0) - f_0(q_0)| = 0,$$

dẫn đến điều mâu thuẫn.

Để chỉ ra điều kiện cần của (ii), ta giả sử tồn tại $p \in X$ sao cho tập các giá trị $\{f(p)\}$ với $f \in \mathcal{F}$ là không bị chặn. Khi đó, với mỗi n tồn tại một hàm $f_n \in \mathcal{F}$ với $|f_n(p)| > n$. Điều này mẫu thuẫn với giả thiết tồn tại một dãy con $\{f_{n_j}\}$ hội tụ trên tập (compact) $\{p\} \subset X$. Điều kiện cần của (i) và (ii) đã được chứng minh.

2. Điều kiện đủ.

Bây giờ, ta giả sử rằng họ $\mathcal{F}$ thỏa mãn (i) và (ii). Xét $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ là một dãy trong $\mathcal{F}$. Gọi $\{p_n\}$ là một dãy trù mật trong X.
Do các giá trị $\{f_n(p_1)\}$ nằm trong tập compact $\{\zeta \in \mathbb{C} | |\zeta| \leq C_{p_1}\}$, ta có thể tìm dãy con thứ nhất $n_{1,1} < n_{1,2} < ... < n_{1,k} < ...$ sao cho dãy $\{f_{n_{1,k}}(p_1)\}$ hội tụ, gọi giá trị giới hạn là $f_0(p_1)$. Tiếp theo, từ tập các giá trị $\{f_{n_{1,k}}(p_2)\}$ chứa trong tập compact $\{\zeta \in \mathcal{C} | |\zeta| \leq C_{p_2}\}$, chúng ta có thể tìm dãy thứ hai $n_{2,1} < n_{2,2} < ... < n_{2,k} < ...$ sao cho dãy $\{f_{n_{2,k}}\}$ (gọi giá trị giới hạn là $f_0(p_2)$), và dãy thứ hai chứa trong dãy thứ nhất. Tương tự, chúng ta có thể tìm thấy vô hạn các dãy của dãy con

$$\begin{array}{ccccc}
n_{1,1} < & n_{1,2} < & \cdots & < n_{1,k} < \cdots \\
n_{2,1} < & n_{2,2} < & \cdots & < n_{2,k} < \cdots \\
n_{3,1} < & n_{3,2} < & \cdots & < n_{3,k} < \cdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
n_{j,1} < & n_{j,2} < & \cdots & < n_{j,k} < ... \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{array}$$

sao cho

(i) Tồn tại giới hạn của dãy $\{f_{n_{j,k}}(p_j)\}$ (gọi giá trị giới hạn là $f_0(p_j)$);

(ii) Với mỗi dãy con $\{n_{j,k}\}$ là tập con của dãy con trước $\{n_{j-1,k}\}$

Từ đó, với bất kỳ j cố định, phần tử của dãy đường chéo $\{n_{\ell,\ell}\}$ chứa trong dãy $\{n_{j,k}\}$ với $\ell \geq j$. Do đó, với dãy con các hàm $\{F_\ell = f_{n_{\ell,\ell}}\}$, ta có $\lim_{\ell\to\infty} F_\ell(p_j) = f_0(p_j)$ với mọi j.

Ta sẽ chứng minh rằng $\{F_\ell\}$ hội tụ đều trên bất kỳ tập con compact $K \subset X$. Do dãy là liên tục đều trên K, với bất kỳ $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d(p,q) < \delta$ bao hàm $|F_\ell(p) - F_\ell(q)| < \epsilon$. Bây giờ, $K \subset \bigcup_{q\in K} B_X(q,\delta)$, và vì K là compact, tồn tại tập hữu hạn $\{q_1, ..., q_N\}$ sao cho $K \subset \bigcup_{J=1}^{N} B_X(q_j,\delta)$. Vì $\lim_{\ell\to\infty} F_\ell(p_{j_r}) = f_0(p_{j_r})$, và khi đó, ta chỉ cần xử lý trên tập hợp hữu hạn điểm, ta có thể tìm được M sao cho $\ell_1, \ell_2 \geq M$ bao hàm $|F_{\ell_1}(p_{j_r}) - F_{\ell_2}(p_{j_r})| < \epsilon$.

Bây giờ, lấy $p \in K$. Khi đó, $p \in B_X(p_j,\delta)$ với mọi j_r. Ta có

$$\begin{aligned}|F_{\ell_1}(p) - F_{\ell_2}(p)| &\leq |F_{\ell_1}(p) - F_{\ell_1}(p_{j_r})| + |F_{\ell_1}(p_{j_r}) - F_{\ell_2}(p_{j_r})| \\ &\quad + |F_{\ell_2}(p_{j_r}) - F_{\ell_2}(p)| \\ &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon.\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra được dãy $\{F_\ell\}$ là Cauchy đều trong cận trên đúng của chuẩn trên K, và do đó dãy hội tụ đều trên K. Định lý được chứng minh. □

1.2 Định lý Montel

Tiêu chuẩn Montel được phát biểu sau đây cho phép ta kiểm tra tính chuẩn tắc của một họ thông qua tính bị chặn đều trên các tập con compact.

Định lý 1.2. *(Montel) Cho $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền, và $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình trên Ω. Giả sử với mỗi tập con compact $K \subset \Omega$, tồn tại hằng số $C_K > 0$ sao cho $|f(z)| \leq C_k$ với mỗi $f \in \mathcal{F}$ và mọi $z \in K$. Khi đó, họ $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc trên Ω .*

Chứng minh. Theo Định lý Arzela - Ascoli, ta chỉ cần chứng minh rằng họ $\mathcal{F}$ là liên tục đều trên mỗi tập con compact $K \subset \Omega$. Do vậy, có thể đẩy vấn đề về việc chứng minh rằng nếu một họ các hàm chỉnh hình trên một đĩa bán kính R bởi M thì nó là liên tục đều trên mỗi hình tròn nằm trong miền xác định.

Lấy $r < R$, và chọn ρ với $r < \rho < R$. Nếu f là hàm chỉnh hình trên đĩa $D(a, R)$ và có mô-đun bị chặn bởi M, và nếu $z, \omega \in D(a, r)$, thì

$$\begin{aligned}|f(z) - f(\omega)| &= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - a| = \rho}\frac{f(zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - a| = \rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - \omega}d\zeta\Big|\\ &= \Big|\frac{z - \omega}{2\pi i}\int_{|\zeta - a| = \rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - \omega)}d\zeta\Big|\\ &\leq |z - \omega| M\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho dt}{|\rho e^{it} + a - z||\rho e^{it} + a - \omega|}\\ &\leq |z - \omega|\frac{M\rho}{(\rho - r)^2}.\end{aligned}$$

Như vây, ta nhận được kết luận của Định lý. □

1.3 Miền đơn liên

Định nghĩa 1.1. Một không gian tôpô X được gọi là đơn liên nếu với mỗi hàm liên tục $\gamma : [0, 1] \to X$ với $\gamma(0) = \gamma(1)$ luôn tồn tại một ánh xạ liên tục $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ sao cho

(1) $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$ với $0 \leq t \leq 1$;

(2) $\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s) = \Gamma(0, 0)$ với $0 \leq s \leq 1$;

(3) $\Gamma(t, 1) = \Gamma(0, 1) = \Gamma(1, 1)$ với $0 \leq t \leq 1$.

Nói cách khác, X là đơn liên nếu và chỉ nếu mỗi ánh xạ liên tục từ hình tròn vào X, đi qua một điểm $x_0 \in X$ có thể biến đổi một cách liên tục đến ánh xạ hằng có ảnh là $\{x_0\}$.

Liên quan tới định lí ánh xạ Riemann, ta chỉ đề cập ở đây tới miền đơn liên trong $\mathbb{C}$.

Mệnh đề 1.1. Một tập mở liên thông Ω trong $\mathbb{C}$ là đơn liên nếu và chỉ nếu phần bù của nó trong hình cầu Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ có nhiều nhất một thành phần liên thông.

Điều kiện tôpô của miền đơn liên dẫn đến hệ quả trong giải tích sau:

Mệnh đề 1.2. Cho $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền đơn liên. Nếu f là chỉnh hình trên Ω và $f(z) \neq 0$ với mọi $z \in \Omega$, thì khi đó tồn tại một nhánh chỉnh hình của $\log f$ xác định trên Ω, có nghĩa, tồn tại một hàm chỉnh hình g dịnh nghĩa trên Ω sao cho $f(z) = exp(g(z))$ với mọi $z \in \Omega$. Đặc biệt, nếu n là một số nguyên dương bất kì, hàm $h_n(z) = exp[\frac{1}{n}g(z)]$ là chỉnh hình và thỏa mãn $h_n(z)^n = f(z)$ với mọi $z \in \Omega$.

1.4 Định lý ánh xạ Riemann

Mệnh đề 1.3. Giả sử $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ là ánh xạ song chỉnh hình của hình tròn đơn vị sao cho $F(0) = 0$, và $F'(0) > 0$. Khi đó, $F(z) = z$ với mọi $z \in \mathbb{D}$.

Chứng minh. Lấy G là ánh xạ ngược của F, $F(G(z)) = z$ và $G(F(\omega)) = \omega$ với mọi $z, \omega \in \mathbb{D}$. Khi đó, $F'(G(z))G'(z) = 1$, và $F'(0)G'(0) = 1$. Mặt khác, $|F(z)| < 1, |G(z)| < 1$ với mọi $z \in \mathbb{D}$, và $F(0) = G(0) = 0$ nên điều này suy ra từ bổ đề Schwarz là $|F'(0)| \leq 1$ và $|G'(0)| \leq 1$. Do đó, ta có $|F'(0)| = 1$ và lại bởi bổ đề Shwarz $F(z) = e^{i\theta}z$. Nhưng từ $F'(0) > 0$ chúng ta phải có $\theta = 0$, và do đó $F(z) = z$. □

Mệnh đề 1.4. Lấy $a \in \mathbb{C}$ với $|a| < 1$, và định nghĩa

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Khi đó biến đổi phân tuyến tính ϕ_a có các tính chất sau:
(i) $\phi_a(0) = a$ và $\phi_a(a) = 0$;
(ii) $\phi_a \circ \phi_a(z) = z$;
(iii) $\phi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ là ánh xạ song chỉnh hình.

Chứng minh. Phát biểu (i) và (ii) là những phép toán đơn giản. Như chúng ta đã biết, mỗi phép biến đổi tuyến tính phân số là là ánh xạ một đối một của hình cầu Rieman vào chính nó. Nếu ta có thể chỉ ra rằng ϕ_a mang hình tròn đơn vị vào chính nó, sẽ kéo theo phát biểu (iii).